

第一章 章末测试卷

[时间:120 分钟 满分:150 分]

一、单项选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知过点 $M(-2, a)$, $N(a, 4)$ 的直线的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 则 $|MN| =$

$$\frac{4-a}{a+2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = 10 \quad |m| = \sqrt{150} \quad (D)$$

A. 10

B. 180

C. $6\sqrt{3}$

D. $6\sqrt{5}$

2. 直线 $x - y + m = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个不同交点的一个必要不充分条件是

A. $0 < m < 1$

B. $-4 < m < 0$

C. $m < 1$

D. $-3 < m < 1$

3. 过点 $P(2, 3)$, 且与 x 轴的正半轴、 y 轴的正半轴围成的三角形的面积等于 12 的直线的方程是

A. $3x - 2y + 12 = 0$

B. $3x + 2y - 12 = 0$

C. $2x + 3y - 13 = 0$

D. $2x - 3y + 13 = 0$

4. 圆 $C: x^2 + y^2 - ax + 2 = 0$ 与直线 l 相切于点 $A(3, 1)$, 则直线 l 的方程为

A. $2x - y - 5 = 0$

B. $x - 2y - 1 = 0$

C. $x - y - 2 = 0$

D. $x + y - 4 = 0$

5. 若点 $P(3, -1)$ 为圆 $C: (x - 2)^2 + y^2 = 25$ 的弦 AB 的中点, 则直线 AB 的方程是

A. $x + y - 2 = 0$

B. $2x - y - 7 = 0$

C. $2x + y - 5 = 0$

D. $x - y - 4 = 0$

6. 已知直线 l 过点 $(-2, 0)$, 当直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 2x$ 有两个交点时, 其斜率 k 的取值范围是

A. $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

B. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

C. $(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$

D. $(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$

7. 已知 P, Q 分别为圆 $M: (x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 4$ 与圆 $N: (x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 1$ 上的动点, A 为 x 轴上的动点, 则 $|AP| + |AQ|$ 的最小值为

A. $5\sqrt{5} - 3$

B. $\sqrt{101} - 3$

C. $7\sqrt{5} - 3$

D. $5\sqrt{3} - 3$

8. 我国魏晋时期的数学家刘徽创立的“割圆术”也就是用圆内接正多边形去逐步逼近圆, 即圆内接正多边形边数无限增加时, 其周长就越逼近圆周长. 先作出圆 $x^2 + y^2 = 2$ 的一个内接正八边形, 使该八边形的其中 4 个顶点在坐标轴上, 则下列 4 条直线中不是该八边形的一条边所在直线的为

A. $x + (\sqrt{2} - 1)y - \sqrt{2} = 0$

B. $(1 - \sqrt{2})x - y + \sqrt{2} = 0$

C. $x - (\sqrt{2} + 1)y + \sqrt{2} = 0$

D. $(\sqrt{2} - 1)x - y + \sqrt{2} = 0$

二、多项选择题(本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项是符合题目要求的, 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分)

9. 若直线过点 $(1, 2)$, 且在两坐标轴上截距的绝对值相等, 则直线的方程可能为

A. $x - y + 1 = 0$

B. $x + y - 3 = 0$

C. $2x - y = 0$

D. $x - y - 1 = 0$

10. 已知圆 C 和直线 $\sqrt{3}x - y = 0$ 及 x 轴都相切, 且过点 $(3, 0)$, 则该圆的方程是

A. $(x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 3$

B. $(x - 3)^2 + (y + 3\sqrt{3})^2 = 27$

C. $(x + 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 3$

D. $(x - 3)^2 + (y - 3\sqrt{3})^2 = 27$

11. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$, 圆 $C_2: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 交于不同的 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点, 则下列结论正确的是

A. $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$

B. $2ax_1 + 2by_1 = a^2 + b^2$

C. $x_1 + x_2 = a$

D. $y_1 + y_2 = 2b$

三、填空题(本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分. 请把正确答案填在题中横线上)

12. 若直线 $(a + 1)x + 2y + 1 = 0$ 与直线 $(a^2 - 1)x - ay - 1 = 0$ 平行, 则 a 的值为

13. 已知直线 $l: y = k(x + 4)$ 与圆 $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, M 是线段 AB 的中点, 则点 M 的轨迹方程为

14. 若 $\odot O_1: x^2 + y^2 = 5$ 与 $\odot O_2: (x - m)^2 + y^2 = 20 (m \in \mathbb{R})$ 相交于 A, B 两点, 且两圆在点 A 处的切线互相垂直, 则线段 AB 的长是

四、解答题(本大题共 5 小题, 共 77 分. 解答时应写出必要的文字说明, 证明过程或演算步骤)

15. (13 分) 已知直线 l 经过直线 $2x + y - 5 = 0$ 与 $x - 2y = 0$ 的交点.

(1) 若点 $A(5, 0)$ 到直线 l 的距离为 3, 求直线 l 的方程;

(2) 求点 $A(5, 0)$ 到直线 l 的距离的最大值.

$$\text{解: (1) 联立 } \begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \therefore \text{交点坐标为 } (2, 1)$$

①若 k 不存在, 则直线 l 为 $x = 2$ 符合题意

$$\text{②若 } k \text{ 存在, 设方程为 } y - 1 = k(x - 2) \text{ 即 } kx - y - 2k + 1 = 0$$

$$\therefore d = \frac{|3k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3 \Rightarrow k = \frac{4}{3} \text{ 故方程为 } 4x - 3y - 5 = 0$$

综上所述 方程为 $x = 2$ 或 $4x - 3y - 5 = 0$

(2) 已知直线过点 $(2, 1)$, $A(5, 0)$ 到直线的最大值为

$$\sqrt{(5-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10} \text{ 故最大值为 } \sqrt{10}$$

16. (15 分) 求以圆 $C_1: x^2 + y^2 - 12x - 2y - 13 = 0$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 + 12x + 16y - 25 = 0$ 的公共弦为直径的圆 C 的方程.

$$\text{解: 联立 } \begin{cases} x^2 + y^2 - 12x - 2y - 13 = 0 \\ x^2 + y^2 + 12x + 16y - 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24x + 18y - 12 = 0 \\ 4x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{②-①得 } 24x + 18y - 12 = 0 \text{ 即 } 4x + 3y - 2 = 0$$

$\therefore C_1, C_2$ 的公共弦为 $4x + 3y - 2 = 0$

由题可知 $C_1(6, 1), r_1 = 5\sqrt{2}, C_2(-6, -8), r_2 = 5\sqrt{5}$

$\therefore C, C_2$ 所在直线方程为 $3x - 4y - 14 = 0$

$$\text{联立 } \begin{cases} 3x - 4y - 14 = 0 \\ 4x + 3y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \therefore \text{圆心为 } (2, -2)$$

$$|C_1C_2| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\text{半径 } r = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - |C_1C|^2} = 5$$

$$\text{故圆 } C \text{ 的方程为 } (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

17. (15分) 已知点 $P(-2, 2)$ 和圆 $C: x^2 + y^2 + 2x = 0$.

(1) 求过 P 点的圆 C 的切线方程;

(2) 若 $Q(x, y)$ 是圆 C 上一动点, 写出 $\frac{y-2}{x+2}$ 的取值范围.

解: (1) 由题知圆 C 的圆心 $C(-1, 0)$ $r=1$

① 当 k 不存在时, 过点 $P(-2, 2)$ 的直线为 $x = -2$

可知 $x = -2$ 到 $C(-1, 0)$ 的距离为 1 , 与圆 C 相切

② 当 k 存在时, 设切线方程为 $y - 2 = k(x + 2)$ 即 $kx - y + 2k + 2 = 0$

$$d = \frac{|1k + 2k + 2|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1 \Rightarrow k = -\frac{3}{4}$$

$\therefore$ 切线方程为 $3x + 4y - 2 = 0$

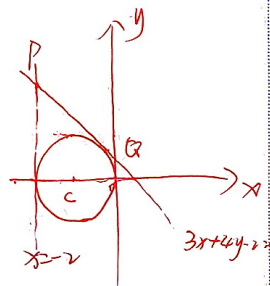
故切线方程为 $x = -2$ 或 $3x + 4y - 2 = 0$

(2) $\frac{y-2}{x+2}$ 即为 (x, y) 与点 $P(-2, 2)$ 的

斜率范围.

由图可知 $k_{PA} \leq -\frac{3}{4}$

$\therefore \frac{y-2}{x+2}$ 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{3}{4}]$.



18. (17分) 为更好地了解鲸的生活习性, 某动物保护组织在某头鲸

身上安装了电子监测设备, 从海岸线放归点 O 处把它放归大海, 并沿海岸线由西到东不停地对其进行跟踪观测. 在放归点 O 的正东方向有一观测站 C , 可以对鲸的生活习性进行详细观测. 已知 $OC = 15$ km, 观测站 C 的观测半径为 5 km. 现以点 O 为坐标原点, 以由西向东的海岸线所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系, 如图所示, 测得鲸的行进路线近似满足曲线 $y = k\sqrt{x}$ ($k > 0$).

(1) 若测得鲸的行进路线上一点 $A(1, 1)$, 求 k 的值;

(2) 在(1)问的条件下, 求:

① 当鲸运动到何处时, 开始进入观测站 C 的观测区域内? (计算结果精确到 0.1)

② 当鲸运动到何处时, 离观测站 C 最近(观测最便利)? (计算结果精确到 0.1)

(参考数据: $\sqrt{41} \approx 6.4$, $\sqrt{11.3} \approx 3.4$, $\sqrt{58} \approx 7.6$)

解: (1) 将 $A(1, 1)$ 代入 $y = k\sqrt{x}$ ($k > 0$).

$$\Rightarrow k = 1$$

(2) 由(1)可知 $y = \sqrt{x}$

① 由题知圆 $C(15, 0)$, $r = 5$, $(x-15)^2 + y^2 = 25$

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ (x-15)^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 29x + 225 = 0$$

$$\Delta = 29^2 - 4 \times 225 = 49 \Rightarrow x_1 = 11.3, x_2 = 17.7$$

故当鲸运动到点 $(11.3, \sqrt{11.3})$ 即 $(11.3, 3.4)$ 时

开始进入观测站 C 的观测区域内

② 当鲸与点 C 的距离最小时, 鲸在 $y = \sqrt{x}$ 上运动 $(x, \sqrt{x})$ 即 $(15, 0)$

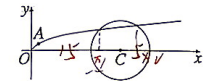
$$d = \sqrt{(x-15)^2 + y^2} = \sqrt{(x-15)^2 + x} = \sqrt{x^2 - 29x + 225}$$

$$\therefore \sqrt{x^2 - 29x + 225} = \sqrt{(x - \frac{29}{2})^2 - (\frac{29}{2})^2 + 225}$$

$\therefore$ 当 $x = \frac{29}{2}$ 时, d 最小

即当鲸运动到点 $(\frac{29}{2}, \frac{\sqrt{58}}{2})$ 时

$(14.5, 3.8)$ 时, 距离观测站 C 最近.



19. (17分) 已知圆 $M: x^2 + (y-4)^2 = 4$, 点 P 是直线 $l: x-2y=0$ 上

的一动点, 过点 P 作圆 M 的切线 PA, PB , 切点分别为 A, B .

(1) 当切线 PA 的长度为 $2\sqrt{3}$ 时, 求点 P 的坐标;

(2) 若 $\triangle PAM$ 的外接圆为圆 N , 试问: 当 P 在直线 l 上运动时, 圆 N 是否过定点? 若过定点, 求出所有定点的坐标; 若不过定点, 请说明理由.

(3) 求线段 AB 长度的最小值.

解: (1) $\because P$ 在直线 $l: x-2y=0$ 上 $\therefore$ 设 P 坐标为 $(2a, a)$

$\therefore M(0, 4)$ $r=2$, $|PA| = 2\sqrt{3}$, A 为切点

$$\therefore MA \perp PA \quad \therefore MP = \sqrt{MA^2 + PA^2} = 4$$

$$\therefore |MP| = \sqrt{(2a)^2 + (a-4)^2} = 4 \Rightarrow a = 0 \text{ 或 } a = \frac{8}{5}$$

$\therefore P$ 的坐标为 $(0, 0)$ 或 $(\frac{16}{5}, \frac{8}{5})$

(2) $\because \triangle PAM$ 始终为直角三角形, $P(2a, a)$, $M(0, 4)$

$\therefore$ 圆 N 是以 MP 为直径的圆, 圆心为 $(a, \frac{a+4}{2})$

$$r^2 = \frac{1}{4}((2a)^2 + (a-4)^2)$$

$$\therefore \text{圆 } N \text{ 为: } (x-a)^2 + (y-\frac{a+4}{2})^2 = \frac{1}{4}a^2 - 2a + 4$$

$$\text{即 } x^2 + y^2 - 2ax - ay - 4y + 4a = 0$$

$$\Rightarrow a(1-2x-y+2) + x^2 + y^2 - 4y = 0$$

$$\text{故点 } P \begin{cases} -2x-y+4=0 \\ x^2+y^2-4y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{8}{5} \\ y=\frac{4}{5} \end{cases}$$

(3) $\because S_{\triangle PAM} = \frac{1}{2} MP \cdot MA$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot MP = \frac{1}{2} \times 2 \times MP \times MP \times \cos \angle MPB$$

$$\text{即 } AB \cdot MP = 4AP$$

$$AB = \frac{4AP}{MP} = \frac{4 \cdot MP \cdot \cos \angle MPB}{MP} \quad \therefore AB^2 = 16 - \frac{64}{MP^2}$$

$$\therefore MP \text{ 与直线 } l \text{ 垂直时, } MP_{\min} = \frac{|-8|}{\sqrt{4+1}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore AB_{\min}^2 = (16 - \frac{64}{MP^2})_{\min} = 16 - \frac{64}{\frac{64}{5}} = 1 \quad \text{故 } AB_{\min} = \sqrt{1}$$

此时线段 AB 的长度最小值为 $\sqrt{1}$

